Πραγμ. Ανάλυση

6-10-21

1η Διάλεξη

Βασικές έννοιες Θ. συνόλων

Ορισμός: Έστω $X, I \neq \emptyset$. Μια οικογένεια $\{x_i\}_{i\in I}$ στοιχείων από το X είναι μια συνάρτηση $f: I \to X$. Αν $I = \mathbb{N}$ τότε η οικογένεια $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (όπου $x_i = f(i)$, $i \in I$) ονομάζεται $\boxed{\text{ακολουθία}}$ στοιχείων του X.

- Αν $k_1 < k_2 < \dots$ όπου $k_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε η x_{k_n} ονομάζεται $\boxed{\text{υπακολουθία}}$ της $\{x_n\}$

- Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_j\}_{j\in J}$ δύο οικογένειες στοιχείων. Ορίζουμε:

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x : \exists\, i \in I \text{ τ.ω } x \in X_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x : x \in X_i,\ \forall\, i \in I\}$$

- Αν $X_i \subseteq \Omega$, $\forall\, i \in I$ (Ω σύνολο αναφοράς) τότε $\boxed{X_i^c = \Omega \setminus X_i}$

- $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (X_i \cap Y_j)$

- $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (X_i \cup Y_j)$

- $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^c = \bigcap_{i\in J} (X_i)^c$

- $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} (X_i)^c$

- Αν $A, B \subseteq \Omega \Rightarrow \boxed{A\setminus B = A\cap B^c \quad (A^c)^c = A}$ και

Ορισμός: Έστω $f: X \to Y$, $\overset{\neq\emptyset}{A} \subseteq X$, $\overset{\neq\emptyset}{B} \subseteq Y$ τότ

$f(A) = \{f(x) : x \in X\}$
$f^{-1}(B) = \{x \in X : \exists\, y \in B,\ \mu\varepsilon\ y = f(x$

- Αν $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_j\}_{j\in J}$ οικογένειες υποσυνόλων το και του Y αντιστοίχως, τότε $f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i$

(*) Αν f 1-1 τότε ισχύει η ισότητα.

Πχ $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$X_1 = (-\infty, 0)$ $X_2 = [0, +\infty)$

$X_1 \cap X_2 = \{0\} \Rightarrow f(X_1 \cap X_2) = \{0\}$

Όμως $f(X_1) = f(X_2) = [0, \infty) \Rightarrow$
$f(X_1) \cap f(X_2) = [0, \infty)$

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$$

- $$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

- $$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, $(B \subseteq Y)$ {ισότητα αν f επί}

Πχ $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$B = \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ αλλά $f(\mathbb{R}) = [0,\infty) \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{R}$

Ορισμός: X, Y σύνολα. Λέμε ότι X, Y είναι ισοδύναμα (ή έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων) αν $\exists\, f: X \to Y$ "1-1" και "επί"

$\boxed{\text{Συμβ. } X \cong Y}$

Ορισμοί: ① A αριθμήσιμο αν $A \cong \mathbb{N}$

② A πεπερασμένο αν $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τω $A \cong \{1, 2, \ldots n\}$

③ A το πολύ αριθμήσιμο αν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο

④ A άπειρο αν δεν είναι πεπερασμένο

⑤ A υπεραριθμήσιμο αν είναι άπειρο, αλλά όχι αριθμήσιμο

Αξίωμα Καλής Διάταξης: Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Πρόταση 1: Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο, τότε A αριθμήσιμο

Απόδειξη

Ορίζω επαγωγικά την απεικόνιση $f: \mathbb{N} \to A$.

$$f(1) = \min A$$
$$f(2) = \min(A \setminus \{f(1)\})$$
$$f(3) = \min(A \setminus \{f(1), f(2)\})$$

Θ.δ.ο f είναι "1-1" και "επί"

$f(1) < f(2) < f(3) \ldots$ Άρα η f γν. αύξουσα $\Rightarrow$ "1-1"

Έστω $n \in A$ (Πρέπει ν.δ.ο $\exists\, t \in \mathbb{N}$ τ.ω $f(t) = n$)

Θέτω $k \ \# \{m \in A, m < n\}$ Θ.δ.ο $f(k+1) = n$

πλήθος

Ισχ: $f(1) < n$ ($1 < k+1$) αλλιώς $f(1) \geq n \Rightarrow k = 0$

Ομοίως
$$\left.\begin{array}{l} f(2) < n \\ \vdots \\ f(k) < n \end{array}\right\} \Rightarrow f(k+1) \geq n$$

$f(k+1) = \min(A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\})$

$f(1), \ldots, f(k) < n$. Αν $f(k+1) < n \Rightarrow n \notin A$ Άτοπο

$\Rightarrow f(k+1) = n$

Πόρισμα: Αν A αριθμήσιμο και B άπειρο υποσύνολο του A. Τότε, B είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη

$\exists\, f: A \to \mathbb{N}$ "1-1" και "επί" τότε η $\tilde{f}: B \to f(B)$ με τύπο $f|_B = \tilde{f}$ είναι "1-1" και "επί"

$\Rightarrow B \cong f(B) \Rightarrow f(B)$ άπειρο $\xrightarrow{f(B) \subseteq \mathbb{N}} f(B)$ αριθμ.

$\xrightarrow{B \cong f(B)}$ B αριθμήσιμο.

Πόρισμα: Αν A αριθμήσιμο και $B \subseteq A \Rightarrow B$ το πολύ αριθμήσ.

(Αν B πεπερ. $\Rightarrow$ πεπερ. } το πολύ
Αν B άπειρο $\Rightarrow$ αριθ. } αριθμ.)

Πρόταση 2: Το σύνολο A είναι το πολύ αριθμήσιμο αν-ν $\exists\, f: A \to \mathbb{N}$ "1-1".

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Αν A αριθμήσιμο $\Rightarrow \exists$ "1-1" $f: A \to \mathbb{N}$ (και επί αλλά δεν μας νοιάζει). Αν A πεπερασμ. $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, f: A \to \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ "1-1" (κ' επί)

"$\Leftarrow$" $\exists\, f: A \to \mathbb{N}$ "1-1". Αν $\tilde{f}: A \to f(A)$ με τύπο $\tilde{f}(x) = f(x)$ $\forall\, x \in A$ τότε $\tilde{f}$ "1-1" και επί $\Rightarrow A \cong f(A) \subseteq \mathbb{N}$

($\mathbb{N}$ αριθμ.
$\Rightarrow f(A)$ το πολύ αριθμήσιμο) $\Rightarrow$ A το πολύ αριθμ.

Πρόταση: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ αριθμήσιμο (καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$).

Πόρισμα: $\underbrace{N \times N \times \dots N}_{k-\text{φορές}} = N^k$ αριθμήσιμο

Απόδειξη (Πρότασης)

Ισχ. Αν $n \in \mathbb{N} = \{1, \dots\}$ τότε $\exists ! \, m, k \in \mathbb{N}$ τ.ω $n = 2^{k-1}(2m-1)$

Αποδ.

$k = \max\{v : 2^{v-1} | n\} \Rightarrow n / 2^{k-1} \in N$ (περιττός)

θέτω $\frac{n}{2^{k-1}} = (2m-1)$. (Η μοναδικότητα είναι προφανής)

Θεωρώ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f(k, m) = 2^{k-1}(2m-1)$

Τότε, από ισχ. f "1-1" και "επί".

Πρόταση: Έστω $A_1, A_2 \dots$ αριθμήσιμη οικογένεια το πολύ αριθμήσιμων συνόλων (όπου το ένα από αυτά άπειρο) με A_1 άπειρ[ο]. Τότε, η $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ είναι αριθμήσιμο

Απόδειξη

Θα υποθέσουμε ότι $A_i \cap A_j = \emptyset$ αν $i \neq j$ (ξένα μεταξύ τους). $\exists$ $f_i : A_i \to \mathbb{N}$ "1-1", $i = 1, 2 \dots$

Ορίζουμε $F : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με τύπο $F(a) = (n_a, f_{n_a}(a))$

όπου n_a ορίζεται ως εξής: $\exists ! \, i \in \mathbb{N}$ τ.ω $a \in A_i$ (γιατί A_i ξένα ανά 2). Θέτω $n_a = i$.

Η F είναι "1-1" διότι αν $F(a) = F(b) \Rightarrow n_a = n_b$

$\Rightarrow a, b \in A_{n_a} = A_{n_b}$

$\Rightarrow f_{n_a}(a) = f_{n_b}(b) \Longrightarrow a = b$ Άρα $\exists$ "1-1" α[πό]

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ το πολύ αριθμ. $\xRightarrow[\text{απ.}]{A_i} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ αριθ[μήσιμο]

Αν δεν ισχύει $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$?

Θέτω $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$
τότε B_i άπειρο, $B_1, B_2, \dots$ ξένα ανά 2 και
$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
⇓
αριθμήσιμο

Πρόταση: Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη

Θέτω $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$, $\mathbb{Q}_- = \{q \in \mathbb{Q}, q < 0\}$
Έχω $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ και $\mathbb{Q}_+ \cong \mathbb{Q}_-$

Απο πρόταση αρκεί ν.δ.ο $\mathbb{Q}_+$ αριθμήσιμο.

$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{ \frac{m}{n} : A_m, n \in \mathbb{N} \}$.

Τα A_m αριθμήσιμα $\forall m \in \mathbb{N}$ επειδή η συνάρτηση
$f_m : \mathbb{N} \to A_m$ με τύπο $f_m(n) = m/n$ είναι "1-1"
και "επί".

$\Rightarrow \mathbb{Q}_+$ αριθμ. (ένωση αρ. συνόλων) $\Rightarrow \mathbb{Q}$ αριθμήσιμο

Λήμμα: Έστω $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ όπου $a_1, a_2, \dots$
$x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ $\quad b_1, b_2, \dots \} \in \{0, \dots, 9\}$

Αν $x \notin \mathbb{Q}$ τότε $\{a_n\} = \{b_n\}$.

(*) Επεξήγηση: $x = 0,a_1a_2\ldots \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$

<u>Πχ</u> (αν $x \in \mathbb{Q}$) $1,00\ldots = 0,999$